

Mein Satz spezieller Würfelchen für den Stochastikunterricht lehnt sich an die Riemer-Würfelchen an, ohne sie jedoch zu kopieren.

Riemers Idee war, Material anzubieten, welches eine eigene Spannung jenseits der „langweiligen“ Laplace-Geräte bietet. Ziel sollte es sein, Hypothesen über die relativen Häufigkeiten aufzustellen und diese dann verifizieren zu können. Weiterhin sollten Situationen geschaffen werden, um Strategien über dem neuartigen Material anzuwenden.

Ich griff u.a. eine Grundidee des „Zinkens“ von Würfeln auf, die Riemer ganz speziell mit dem O-Würfel thematisierte (s.Bild). Ansonsten spielt Riemer durch seine Formen immer wieder auf das Kippmoment der Objekte an, indem er relativ drastische Höhen konstruiert.

Ich habe aus technischen Gründen darauf verzichten müssen, die Regel „Augensumme 7 auf gegenüberliegenden Seiten“ der Normalwürfel zu beachten.

Riemer weist darauf hin, dass geeignetes Unterrichtsmaterial teilsymmetrisch sein muss, um Hypothesen und ihre Verifizierung sinnvoll bearbeiten zu können.

Zufallsgeräte wie Reißzwecken oder LEGO-Steine sind dazu eher weniger geeignet: Der Bau der Reißzwecke gibt trotz des niedrigen Schwerpunkts keine Lagepräferenz her und LEGO-Steine sind zu unregelmäßig ausgehöhlt (siehe dagegen den U-Würfel unten).

Einen wesentlichen Anteil an der Hypothesenbildung über die LUDOS-Objekte tragen Flächenbetrachtungen; so wird hauptsächlich argumentiert, die Objekte würden gemäß ihren Flächen eine unterschiedliche relative Häufigkeit zeigen.

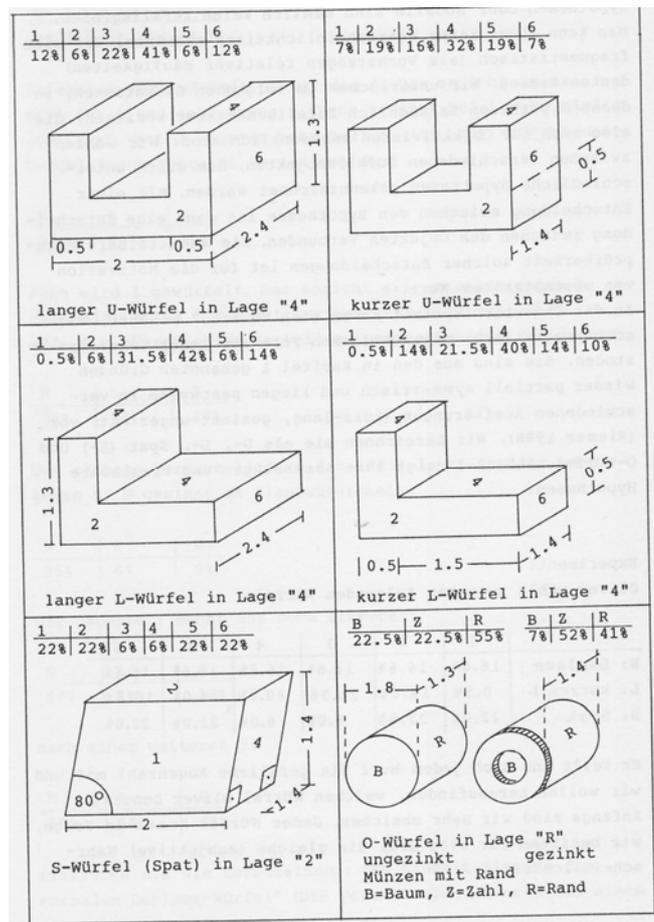
Das Flächenargument trägt jedoch nur bedingt. Im Einzelfall müssen weitere Faktoren – vor allem Kippmomente und Schwerpunktsverschiebungen – in Rechnung gestellt werden.

In jedem Fall handelt es sich beim Würfeln um elastische Stoßvorgänge mit dem Untergrund, auch wenn auf Filz geworfen wird; das kann eindrucksvoll beobachtet werden.

Die folgenden Überlegungen unterstellen einen Fall eines Objektes aus ca. 20cm Höhe über einem Filz auf harter, ebener Unterlage. Es kann grundsätzlich beobachtet werden, dass ein Würfel selten so liegen wird wie er aufkam; **es finden nach dem Aufprall meistens weitere Drehungen statt** (egal ob harte oder Filzunterlage).

Video-Analysen lassen erahnen, dass chaotische Effekte für Wurfobjektlagen zuständig sind. *LePrax wird in Kürze (April 08) Filme bereitstellen, die das „Auftreffverhalten“ von Wurfobjekten analysieren helfen.*

Real sollte aus einem Becher (mit Hand unter halten) über einer Filzmatte geworfen werden! (...um eine standardisierte Wurfsituation mit Geräuschreduktion zu erhalten)



Grundsätzlich gilt für alle Objekte: Es gibt eine Flugphase und eine Kollisionsphase (Stoß mit der Oberfläche, auf die geworfen wird). Die möglichen Bewegungen aus der Flugphase sind für das Wurfresultat unerheblich.

In jedem Fall lassen sich **begründete** Hypothesen zu den Wurfobjekten formulieren und im Experiment verifizieren; je nach Altersstufe kann die Hypothesenbildung „komplizierter“ oder „einfacher“ ausfallen: Jüngere Jahrgänge könnten bereits bei Flächenbetrachtungen stehen bleiben, ältere Jahrgänge zusätzliche Aspekte untersuchen. Dieser Schritt ist auch für Oberstufen spannend!

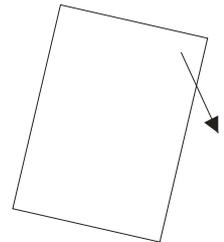
1. Untersuchung der Quader

Bei den Quadern ist in jedem Fall das Flächenargument *mehr oder weniger stichhaltig*.

1.1 dicker Quader

$p(1/2) = 0,12$; $p(\text{sonst}) = 0,19$; $20 \times 20 \times 25$

Auf 28% der Oberfläche entfallen 24% der Wahrscheinlichkeit; hier schlägt ein Kippmoment ein wenig zu Buche. Da das Kippmoment gegen $p(1/2)$ arbeitet, sei das Kippmoment numerisch als %-Wert beschrieben: $0,12:0,16 = 0,72$



1.2 kleiner Quader

$P(5/6) = 0,284$; $p(\text{sonst}) = 0,108$; $20 \times 20 \times 14,5$

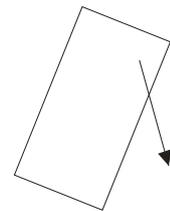
Auf 41% der Oberfläche entfallen 57% der Wahrscheinlichkeit; hier kommt ein Kippmoment deutlich zum Tragen. Es ist gegen $p(\text{sonst})$ gerichtet: $0,108:0,16 = 0,65$

1.3 langer Quader

$P(5/6) = 0,29$; $p(1/2) = 0,06$; $p(3/4) = 0,15$; $14,5 \times 20 \times 28$

Auf 23% der Oberfläche entfallen 12% der Wsk, auf 32% der Fläche weitere 30% der Wsk und auf die restlichen 45% Fläche entfallen 48% Wsk. Hier gibt es insbesondere ein Kippmoment gegen $p(1/2)$: $0,06:0,16 = 0,36$. Da die Verlängerung des Quaders noch deutlicher als beim dicken Quader ist, haben wir auch numerisch einen deutlich kleineren Faktor als in (1.2).

An diesem Würfelchen sieht man nun ganz deutlich die Rolle eines Kippmoments: Die kleinen Stirnflächen sind sehr anfällig gegen Kippen, die mittleren Flächen noch etwas (verlieren also nur wenig), Gewinner sind die beiden großen Flächen. Übrigens bieten längere Quader *in einem Würfelbecher* keine weiteren Differenzierungen, da das Kippmoment ausgebremst wird!



2. gezinkte Würfel: U- und L-Würfel / s.a. Delta-Würfel (6)

Hier tragen Flächenbetrachtungen nicht mehr.

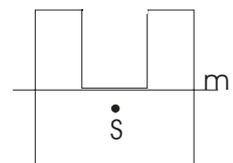
2.1 U-Würfel

$P(1) = 0,20$; $p(2) = 0,24$; $p(3/4) = 0,137$; $p(5/6) = 0,143$; 20mm

Der Schwerpunkt des Würfelchens ist in Richtung der 1 auf 0,875cm gefallen. Damit lässt sich fast ideal die Verteilung der 1 zur 2 beschreiben: haben für den idealen Würfel beide die gleiche Wsk, so sollte die Verteilung jetzt drei Siebtel zu vier Siebtel betragen ($0,43:0,57$); die relativen Häufigkeiten liefern $0,45:0,55$.

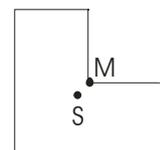
Fällt der Würfel zunächst auf die 2, so ist durch den veränderten Schwerpunkt eine Drehung um die Achse parallel zum Ausschnitt begünstigt, wobei dann häufiger 5 und 6 als 3 und 4 als Endlage vorkommen. Dieses kann durch gezieltes Experimentieren gesehen werden.

Die Präferenz von 5 und 6 entsteht auch daraus, dass beim Fall auf 3 oder 4 in der Regel 5 oder 6 als Endlage folgen (wieder eine Folge des veränderten Schwerpunkts), in weniger Fällen 3 oder 4.



2.2 L-Würfel

$p(1/2) = 0,215$; $p(4) = 0,254$; $p(3/5) = 0,158$; 20mm

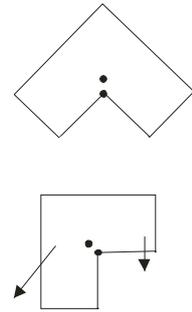


Anmerkung: Zwar kann der L-Würfel auf der 1 oder der 2 stehen, er würde aber niemals aus einem dynamischen Prozess auf einer wandlosen Fläche so verharren können. Der Schwerpunkt rutscht aus der Mitte gegen die untere linke Kante.

Die 4 nimmt 2 Seitenflächen ein, sie kann aber nur auftreten, wenn der Schwerpunkt des Gerätes relativ hoch liegt; deswegen bleibt von den theoretischen 0,33 für die 4 nur 0,254 übrig. Fällt der Würfel auf die 1 oder 2, kippt er zur 4 oder auf die Vollflächen; in der Regel kippt er zur 4, weil der „Überhang“ massiv dazu zwingt; in wenigen Fällen profitieren die 1 oder 2.

Der veränderte Schwerpunkt macht sich zugunsten von Drehungen bemerkbar, indem eine Rotation nach einem ersten Stoß mit der Unterlage die Lage auf den beiden Vollflächen bevorzugt wird – also eine Präferenz der 1 und 2.

Die 3 und 5 konkurrieren nach Drehungen mit solchen nach neuem Schwerpunkt bevorzugten Lagen – und verlieren.



3. S-Würfel

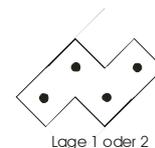
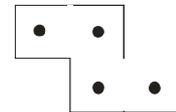
Der S-Würfel ist wegen eines denkbaren indifferenten Gleichgewichts interessant.

$P(1/2) = 0,122$; $P(3/4) = 0,147$; $P(5/6) = 0,231$; $30 \times 20 \times 20$

Der Schwerpunkt des Objektes liegt exakt in der Mitte des Körpers.

Auch hier gilt – wie beim L-Würfel – dass ein Stehenbleiben auf der 1 oder 2 auf unberandeter Fläche dynamisch unmöglich ist.

Hier stehen insbesondere die 1 und 2 (auf den schmalen Stirnflächen) in Konkurrenz zur 5 und 6 (auf den Basisflächen), weil es ein indifferentes Gleichgewicht zwischen beiden geben könnte. Beide beruhen auf den gleichen Flächenpräferenzen. Dennoch gibt es absolut keine 50:50-Relation beider Lagen! Das Beharren ist erstaunlicherweise deutlicher als das Kippen, weil die Länge des Körpers das Beharren fördert. Erst jenseits von 45° ist der Körper zum Kippen zu bewegen. Das Objekt ist 2cm hoch und 2cm tief, deswegen sollte es kein weiter zu beachtendes Kippmoment geben.



4. O-Würfel

Der O-Würfel (Zylinder) demonstriert ausschließlich das Kippmoment!

$P(4/5) = 0,27$; $P(\text{sonst}) = 0,153$; ca. 10mm Radius; ca. 15mm Höhe

Die Flächenverhältnisse: 41% Deckflächen, 59% Mantel

Fällt der Körper auf die Mantelfläche, gibt es ein deutliches Kippmoment – hin zur 4 bzw. 5. Dieses Moment wird verstärkt, wenn eine Rotation wieder zu einer Mantelflächenlage führt, die das Kippmoment enthält.

In der Mantelfläche sind die Lagen $P(\text{sonst})$ natürlich gleichberechtigt.

Eine plausible Hypothese könnte sein: Eine Hälfte der Wsk entfällt auf die Mantelfläche, der Rest auf die Deckflächen. Wegen des „doppelten“ Kippmoments gibt es eine leichte Verschiebungen zur 4 und 5.

An diesem Würfelchen wird noch einmal deutlich, dass man *kategorisch* denken muss:

Es gibt 2 Arten von Wahrscheinlichkeiten: Deck- und Mantelfächen bezogene Lagen, untereinander sind sie jeweils gleich!

5. D-Würfel

Der D-Würfel ist ein halber Zylinder, also ein gezinkter O-Würfel, der fast so gezinkt ist wie der Delta-Würfel gegenüber dem Normal-Würfel. Hier ist aber die Tiefe bewusst zur Demonstration eines Kippmoments erhöht worden.

$P(2/3) = 0,095$; $P(1) = 0,34$; $P(4) = 0,47$; 30mm Basis; 15mm Höhe; 25mm Tiefe; 45% Fläche 1, 28% Fläche 4, der Rest für 2 und 3

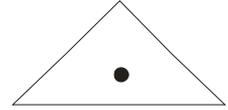
Das Kippmoment wird deutlich erfahrbar anhand der geringen Werte für die 2 und 3.

Das relative Vorkommen der 1 und der 4 **korreliert nicht mit der Schwerpunktslage**, die unterhalb der Halbkreismitte liegt und somit die 1 bevorzugen sollte (s.a. Delta-Würfel!). Es liegt *fast* eine umgekehrte Proportionalität vor: 45:34 für die 1 und 28:47 für die 4. Hier ist wieder zu beachten, dass der Schwerpunkt zunächst die Orientierung beim Auftreffen beeinflussen mag, dann kommen Folgeeffekte zum Tragen.

Am meisten profitieren 1 und 4 von dem Auftreffen auf 2 und 3; dann gibt es aber für die 4 wesentlich mehr Anteile, ein Kippmoment für sich zu entscheiden (auf der längeren Halbkreislinie).

6. Delta-Würfel

Der Delta-Würfel ist letztlich eine Ableitung vom normalen Würfel, also ein drastisches Zinken. Zwar ist es technisch schwierig, die Masse ideal herzustellen, aber mit 28mm Basislänge und 14mm Höhe des Stirnflächen-Dreiecks liegt im Wesentlichen ein halber Würfel vor (bei 20mm Seitenlänge).



P(1/2)=0,069; P(3)=0,472; P(4)=0,39

Der Schwerpunkt des Würfelchens ist sehr weit nach unten gerückt. Trotzdem wird nicht das Ergebnis 4 bevorzugt! Möglicherweise überwiegen Flächenanteile?

44% der Oberfläche wird von der 4 belegt, die 4 zeigt 39% der Wsk; die 3 kommt auf 32% der Oberfläche vor und zeigt 47% der Wsk. Es liegt fast eine umgekehrte Proportionalität vor (44:39 vs. 32:47).

Am meisten profitieren 3 und 4 von dem Auftreffen auf der 1 und 2, wobei die 3 wieder auf einer längeren Linie ein Kippmoment für sich entscheiden lassen kann.

Dieses Moment könnte bei D- und Delta-Würfel wirklich bedeutsam sein, stimmt es doch sogar mit den Kanten-Relationen i.e. überein:

| | | | |
|----------|-----------------------|-----------------|------------------------|
| D-Würfel | 2r bzw. $2r\pi$ | 0,34 bzw. 0,47 | Faktor $\pi \sim 3,14$ |
| Delta | 2' $\sim 1,41$ bzw. 4 | 0,39 bzw. 0,472 | Faktor $\sim 1,41$ |

*Der Effekt solcher Überlegungen liegt letztlich in der Wiederholbarkeit. Der LUDOS-Satz bietet mit 9 Objekten genügend Material, um aus genauen Untersuchungen **eines** Gerätes heraus ein **nächstes** Gerät zu beurteilen (bis auf den S-Würfel, der keine Entsprechung hat)!*

In jedem Fall gibt es einen neuen Aufgabentyp: Anbieten von Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Wurfobjekte mit der Aufgabe, diese zu beurteilen!

Dieses führt zu *neuen Bewertungsanforderungen* für textliche Leistungen – was bisher der Mathematik fremd war.

Anhang

Bisher vertrauenswürdige Werte für den LUDOS-Satz (Dez.2007; gewonnen aus 1000 Würfeln je Objekt über Filz aus einem Würfelbecher):

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|
| L | 0,215 | 0,215 | 0,158 | 0,254 | 0,158 | |
| U | 0,20 | 0,24 | 0,137 | 0,137 | 0,143 | 0,143 |
| D | 0,34 | 0,095 | 0,095 | 0,47 | | |
| O 14mm | 0,155 | 0,155 | 0,155 | 0,2675 | 0,2675 | |
| O 15mm | 0,144 | 0,144 | 0,144 | 0,284 | 0,284 | |
| S | 0,122 | 0,122 | 0,147 | 0,147 | 0,231 | 0,231 |
| Q lang | 0,06 | 0,06 | 0,15 | 0,15 | 0,29 | 0,29 |
| Q kurz | 0,108 | 0,108 | 0,108 | 0,108 | 0,284 | 0,284 |
| Q dick | 0,12 | 0,12 | 0,19 | 0,19 | 0,19 | 0,19 |
| Delta | 0,069 | 0,069 | 0,472 | 0,39 | | |

Dabei gelten folgende idealtypische Abmessungen der Wurfgeräte (ab dem Jahr 2008):

L-Wurfgerät: 20x20x20mm³, ausgespart 10x10x20mm³

U-Wurfgerät: 20x20x20 mm³, ausgespart 8x10x20mm³

D-Wurfgerät: 30mm Basis, 15mm Radius

Delta-Gerät: 28mm Basis, 14mm Höhe

O-Gerät: 21x15 oder 20x14

S-Gerät: $30 \times 20 \times 20 \text{ mm}^3$ – 2 Mal $10 \times 10 \times 20 \text{ mm}^3$
Q-dick: $20 \times 20 \times 25 \text{ mm}^3$
Q-Lang: $14,5 \times 20 \times 28 \text{ mm}^3$
Q-Kurz: $14,5 \times 20 \times 20 \text{ mm}^3$